



ENERGI PENGGERAK UNTUK MEMPERCEPAT KESETIMBANGAN GERAK BROWN TEREDAM SEBAGIAN (UNDERDAMPED)

Nur Elisa¹, Iwan Setiawan², Dedy Hamdani³

^{1,2,3}Program Studi Pendidikan Fisika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Bengkulu
Jl. Jalan W.R. Supratman, Bengkulu 38122, Indonesia
Email penulis pertama: nurelisa2809@gmail.com

Abstract

Brownian motion is the random motion of nanoparticles in a fluid. When the movement has reached a point *equilibrium*, then given a disturbance it will take a very long time to return to a state of equilibrium. This research is a literature study by reviewing some of the literature that is in line with this research and using analytic calculations. Method *Shortcuts to Adiabaticity* (STA) is one of the solutions to accelerate this adiabatic quantum dynamics by adding additional energy to the system so that it can reach a point *equilibrium* back so that the system can be characterized. This method is applied to the Kramers equation which is tested with partially damped Brownian motion (*underdamped*). The result obtained from this method is an additional term in the form of additional energy depending on the constant friction (γ) and is time dependent which is affected by the initial potential. Using this method can find the distribution characteristics of the Brownian particles which are much faster

Keywords: *Brownian Motion, Kramers Equation, Equilibrium, Shortcuts to Adiabaticity*

Abstrak

Gerak Brown merupakan gerak acak partikel nano dalam fluida. Ketika pergerakannya sudah mencapai titik *equilibrium*, kemudian diberi gangguan maka akan membutuhkan waktu yang sangat lama untuk kembali ke keadaan setimbang. Penelitian ini merupakan penelitian studi pustaka dengan mengkaji beberapa literatur yang selaras dengan penelitian ini dan menggunakan perhitungan analitik. Metode *Shortcuts to Adiabaticity* (STA) menjadi salah satu solusi untuk mempercepat dinamika kuantum adiabatik ini dengan cara menambahkan energi tambahan dalam sistem sehingga dapat mencapai titik *equilibrium* kembali sehingga sistem dapat terkarakteristik. Metode ini diterapkan pada persamaan Kramers yang diujikan dengan gerak Brown teredam sebagian (*underdamped*). Hasil yang diperoleh dari metode tersebut adalah suku tambahan yang berupa energi tambahan bergantung dengan konstanta gesekan (γ) dan bergantung terhadap waktu yang dipengaruhi oleh potensial awal. Dengan menggunakan metode ini dapat menemukan karakteristik distribusi pada partikel Brown yang jauh lebih cepat.

Kata kunci: Gerak Brown, Persamaan Kramers, Ekuilibrium, Shortcuts to Adiabaticity

Cara Menulis Sitasi: Elisa, N., Setiawan, I., Hamdani, D (2023). Judul artikel. Energi Penggerak Untuk Mempercepat Kesetimbangan Gerak Brown Teredam Sebagian (Underdamped). Jurnal Inovasi dan Pembelajaran Fisika, 10 (1), halaman 21-33

PENDAHULUAN

Waktu yang singkat dalam proses pembuatan sebuah produk merupakan faktor yang sangat penting dan terus diupayakan saat ini. Semakin sedikit waktu yang diperlukan untuk merancang

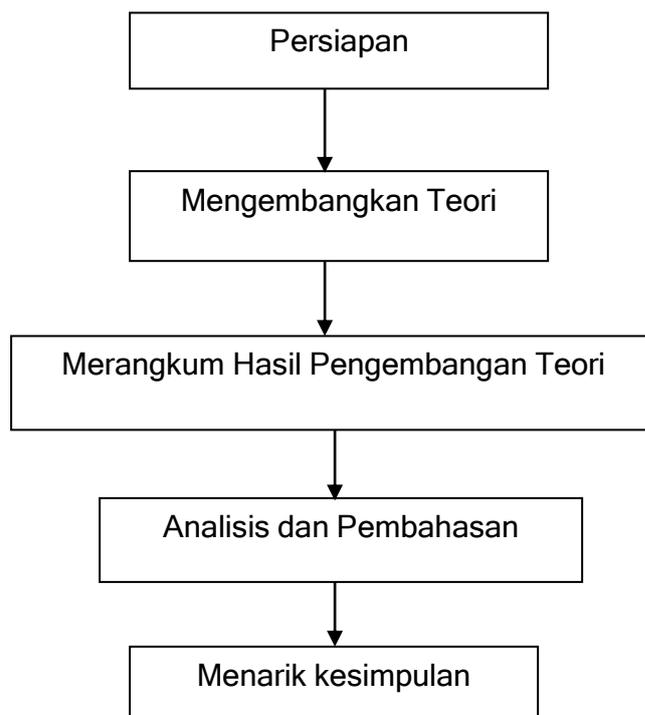
bahkan memproduksi sebuah produk tentu akan memberikan dampak positif (Setiawan, 2018). Dalam dunia mikroskopis terdapat cara untuk mempercepat proses dinamika dalam waktu yang lebih singkat. Dengan konsep mempercepat dinamika kuantum dengan mempertahankan karakteristik tiap level energi dari sistem yang disebut dinamika kuantum adiabatik. Proses adiabatik dalam kuantum sering digunakan untuk mendorong atau mempersiapkan keadaan akhir dengan cara yang kuat dan dapat dikendalikan, proses adiabatik di sini adalah perubahan lambat dari parameter keadaan hamiltonian. Proses adiabatik ini merupakan faktor yang sangat penting dalam memanipulasi dinamika partikel kuantum, karena sistem ini tidak mengalami perubahan keadaan eigen pada saat sebelum dan sesudah sistem berlangsung (Chen & Muga, 2010). Oleh karena itu upaya untuk mempercepat dinamika kuantum adiabatik menjadi bahasan yang penting untuk dikembangkan (Setiawan, 2018). Ada beberapa metode yang telah dikembangkan untuk mempercepat dinamika kuantum adiabatik dan metode yang saat ini masih dikembangkan adalah *fast forward* (FF) dan *Shortcuts to Adiabaticity* (STA) (Guéry-Odelin et al., 2019).

Metode *fast forward* artinya adalah merangkai atau memproduksi suatu peristiwa dengan mempersingkat skala waktu seperti proyeksi film cepat di layar (Nakamura et al., 2017). Ada beberapa penelitian yang sudah menggunakan metode *fast forward* yaitu metode *fast forward* dalam mesin carnot, metode *fast forward* dalam tunneling (Khujakulov & Nakamura, 2016) (Nakamura et al., 2017), metode *fast forward* dalam sistem banyak benda (Masuda & Nakamura, 2022), metode *fast forward* dalam sistem Diskrit (Masuda & Rice, 2014) (Takahashi, 2014), dan Dinamika Dirac (Sugihakim et al., 2021). Sedangkan metode *shortcuts to adiabaticity* (STA) adalah seperangkat teknik untuk mendapatkan hasil yang sama dengan metode adiabatik dalam waktu yang singkat. Metode *shortcuts to adiabaticity* (STA) dikembangkan oleh ilmuwan Gonzalo Muga, Xi Chen, dan Del Campo (Guéry-Odelin et al., 2019) (Torrontegui et al., 2012) (Del Campo, 2013). Fitur umum dan penting dari *shortcuts to adiabaticity* (STA) selain dari kecepatan yang dicapai adalah bahwa biasanya ada banyak rute atau alternatif untuk parameter kontrol dan fleksibel ini dapat digunakan untuk mengoptimalkan variabel yang relevan secara fisik, misalnya untuk meminimalkan eksitasi energi dan konsumsi energi (Guéry-Odelin et al., 2019). Beberapa penelitian yang menggunakan metode STA ini yaitu, spin (Hatomura & Mori, 2018) (Cohn et al., 2018) (Çakmak & Müstecaplıoğlu, 2019), osilator harmonik (Chen & Muga, 2010), dan Dinamika Dirac (Deffner, 2016) STA juga telah mengembangkan cara mempercepat proses kesetimbangan pada gerak Brown.

Beberapa penelitian yang telah meninjau gerak Brown dengan menggunakan metode STA salah satunya adalah Martinez, 2016 yang melakukan eksperimen pada partikel Brown dalam perangkat mikro dan nano yang terperangkap dalam potensial optik yang dapat dikontrol dengan waktu. Eksperimen tersebut dimulai dari kasus perubahan yang membutuhkan waktu sangat lama sementara partikel selalu dalam posisi kesetimbangan (*equilibrium*) dan kasus perubahan yang berlangsung cepat tetapi partikel membutuhkan waktu sangat lambat untuk mencapai posisi

kesetimbangan (*equilibrium*), sehingga Martinez dkk melakukan eksperimen untuk mencari jalan keluar dari kasus itu dengan menambahkan potensial tambahan ke dalam sistem dan dapat dihasilkan dari proses ini sistem dapat mencapai kesetimbangan 100 kali lebih cepat daripada ekuilibrasi secara alami. Metode ini disebut dengan Engineered Swift Equilibration (ESE) (Martínez et al., 2016). Selain itu Katsuhiro Nakamura, 2020 (Nakamura et al., 2020) dan Z.C Tu, 2017(Li et al., 2017) juga telah meninjau gerak Brown untuk mencapai kesetimbangan pada keadaan *underdamped* dan *overdamped*. Pada penelitian ini mencoba untuk meninjau metode yang telah dilakukan oleh penelitian-penelitian sebelumnya untuk mendapatkan energi tambahan untuk mempercepat kesetimbangan pada gerak Brown yang ditinjau secara *underdamped*.

METODE



Gambar 1. Bagan Prosedur Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian dasar yang mengkaji teori fisika yang bersifat kuantitatif. Dengan cara melakukan studi literatur yang berkaitan dengan teori kuantum adiabatik. Studi literatur yang dilakukan terkait dengan metode *Shortcuts to Adiabaticity* (STA) sebagai penentu parameter kontrol, gerak Brown, dan persamaan Kramers untuk menghitung energi penggerak dalam gerak Brown teredam sebagian. Penelitian ini dilaksanakan pada bulan Mei 2022 sampai dengan Agustus 2022 di Universitas Bengkulu. Dengan prosedur penelitian sebagaimana pada gambar 1 bagan prosedur penelitian sebagai berikut:

a. Persiapan

Pada tahap ini adalah mempersiapkan bahan-bahan untuk dijadikan sumber informasi utama pada penelitian ini dengan mencari buku-buku literatur, jurnal, dan media elektronik untuk menambah pengetahuan dan pemahaman mengenai metode STA serta penerapannya pada gerak brown teredam sebagian yang diterapkan dengan persamaan Kramers.

b. Pengembangan teori

Pada tahap dikembangkannya teori dari persamaan Kramers yang terdapat pada studi literatur kemudian dikembangkan dan diuji dengan metode STA untuk mencari energi tambahan yang menjadi energi penggerak pada gerak Brown teredam sebagian (*underdamped*).

c. Hasil Pengembangan Teori

Hasil pengembangan teori dengan menggunakan metode STA yang diterapkan pada persamaan Kramers pada kasus gerak brown teredam sebagian diperoleh hasil yang dapat dipergunakan untuk mencari nilai potensial tambahan dengan nilai potensial awal yang berbeda

d. Analisa dan pembahasan

Hasil dari pengembangan teori mengenai potensial tambahan yang menjadi energi penggerak dibahas secara runtun dan sistematis dengan cara melakukan perhitungan analitik untuk mendapatkan potensial tambahan.

e. Kesimpulan

Hasil dari analisis dan pembahasan secara perhitungan analitik dan teroi kemudian disimpulkan untuk menjawab rumusan masalah pada penelitian ini.

Agar tidak terjadi perbedaan penafsiran dalam penelitian ini, maka diperlukan definisi operasional dari variabel yang akan diteliti yaitu, pertama adalah gerak brown yang merupakan gerak acak atau gerak terus-menerus dari partikel saat dimasukkan ke dalam fluida (Brown & Bennett, 1866). Secara matematis gerak ini dijelaskan oleh konsep stokastik. Berdasarkan penelitian Robert Brown didapatkan dua hasil yaitu tidak teraturnya lintasan partikel dalam fluida dan tidak adanya pengaruh hasil interaksi dua partikel yang berlainan (Romadani & Rosyid, 2022). Kedua, keadaan teredaman sebagian (*underdamped*) yang terjadi apabila suatu benda masih melakukan beberapa osilasi sebelum berhenti. Hal ini diakibatkan oleh redaman yang dialaminya tidak terlalu besar (Pradana, 2018). Redaman ini dapat berupa gaya gesekan udara, gesekan lain yang melawan arah gerak benda, ataupun berasal dari gaya luar yang sengaja diberikan (Pradana, 2018). Ketiga, *underdamped* adalah sistem menuju keadaan mantap dengan berosilasi, dimana amplitudo terhadap waktu perlahan mengecil, dan akhirnya menuju nol (Francis S. TSE, Ivan E. Morse, 1978). Keempat, persamaan Kramers yang merupakan persamaan Fokker-Planck khusus yang menggambarkan gerak Brown dalam suatu potensial. Untuk masalah satu dimensi, persamaan ini merupakan persamaan untuk fungsi distribusi dalam

ruang posisi dan kecepatan (Risken, 1996). Persamaan kramers merupakan persamaan diferensial parsial yang menggambarkan fungsi kerapatan probabilitas dari partikel Brown dalam ruang fase.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dinamika gerak Brown pada sistem *underdamped* di gambarkan melalui persamaan Kramers (Jenks, 2006)(Risken, 1996) sebagai berikut:

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = \{H_0, \rho_0\} + \gamma \partial_p \left(\frac{\partial H_0}{\partial p} \rho_0 + \frac{1}{\beta} \partial p \rho_0 \right) \quad (1)$$

Dengan $\{ \dots \}$ adalah kurung Poisson, sehingga persamaan (1) dapat dituliskan menjadi persamaan (2).

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = \left(\frac{\partial H_0}{\partial p} \frac{\partial \rho_0}{\partial x} - \frac{\partial H_0}{\partial x} \frac{\partial \rho_0}{\partial p} \right) + \gamma \partial_p \left(\frac{\partial H_0}{\partial p} \rho_0 + \frac{1}{\beta} \partial p \rho_0 \right) \quad (2)$$

Dengan ρ_0 adalah variabel yang menggambarkan distribusi partikel, γ adalah konstanta gesekan, β adalah konstanta termodinamika yang berhubungan dengan suhu yang besarnya $\beta = -\frac{1}{kT}$, x sebagai variabel yang menyatakan posisi partikel/ letak partikel, dan t adalah waktu, dan H_0 adalah hamiltonian, Jika energi kinetik awal $= \frac{p^2}{2m}$, dan potensial awal atau $U_0 = \frac{1}{2} \lambda x^2$, maka hamiltonian partikel atau $H_0 =$ energi kinetik awal + potensial awal, sehingga hamiltonian partikel atau $H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} \lambda x^2$ (Nakamura et al., 2020)(Li et al., 2017). Jika ditinjau distribusi partikel dengan mengasumsikan $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \right)$ dengan λ adalah konstanta, maka didapatkan distribusi partikel keadaan *equilibrium* (setimbang) menjadi persamaan (3).

$$\rho_0 = c \exp(-\beta H) \quad (3)$$

Masukkan nilai hamiltonian ke persamaan (3), maka menjadi persamaan (4).

$$\rho_0 = c \exp \left(-\beta \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} \lambda x^2 \right) \right) \quad (4)$$

Nilai dari konstanta C dapat diperoleh dengan cara normalisasi, sehingga menjadi persamaan (5).

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\rho_0(x, \lambda)|^2 dx dp = 1 \quad (5)$$

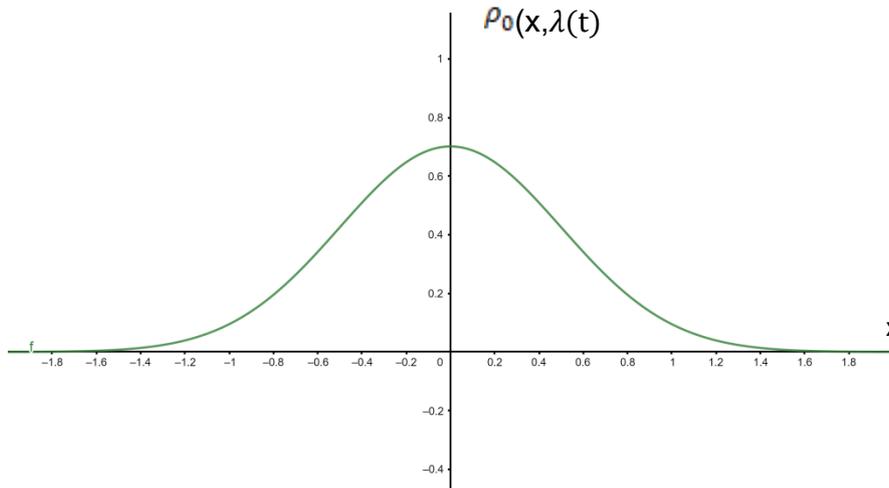
Dengan mensubstitusikan hasil dari $\rho_0(x, \lambda)$ pada persamaan(4) ke persamaan (5), maka didapatkan nilai dari konstanta C, maka menjadi persamaan (6).

$$C = \frac{\beta\sqrt{\lambda}}{\pi} \tag{6}$$

Kemudian, substitusikan nilai konstanta C pada persamaan (4), maka distribusi partikel pada keadaan setimbang (*equilibrium*) dapat dituliskan menjadi persamaan (7).

$$\rho_0 = \frac{\beta\sqrt{\lambda}}{\pi} \exp\left(\frac{-\beta p^2}{2m} + \frac{-\beta}{2} \lambda x^2\right) \tag{7}$$

Pola distribusi partikel ($\rho_0(x,\lambda)$) untuk x mulai dari x= -2 sampai x=2 dapat diamati pada gambar 2, di bawah ini



Gambar 2. Distribusi Partikel mulai dari x=-2 sampai x =2, saat , $\beta=2$, $\lambda=2$, $p=0,5$, dan $m=1$

Selanjutnya, jika sistem diberi gangguan dengan parameter kontrol λ ditinjau menjadi parameter kontrol yang bergantung waktu ($\lambda(t)$), maka persamaan (7) dapat dituliskan menjadi persamaan (8).

$$\rho_0^{eq} = \frac{\beta\sqrt{\lambda(t)}}{\pi} \exp\left(\frac{-\beta p^2}{2m} + \frac{-\beta}{2} \lambda(t)x^2\right) \tag{8}$$

Agar $\rho_0(x,\lambda(t))$ pada persamaan (8) tetap memenuhi persamaan Kramers pada persamaan (1), maka Hamiltonian menjadi $H = H_0 + h$, dengan h adalah potensial tambahan yang akan ditambahkan agar sistem kembali ke keadaan setimbang. Maka dapat dituliskan menjadi persamaan (9).

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} \lambda(t)x^2 + h \tag{9}$$

Pada keadaan setimbang (*equilibrium*) Hamiltonian persamaan Kramers dapat dituliskan kembali menjadi persamaan (10).

$$\frac{\partial \rho_0^{eq}}{\partial t} = \{H_0 + h, \rho_0^{eq}\} + \gamma \partial_p \left(p \rho_0^{eq} + \frac{1}{\beta} \partial_p \rho_0^{eq} \right) + \gamma \partial_p \left(\rho_0^{eq} \frac{\partial h}{\partial p} \right) \tag{10}$$

Dengan {...} adalah kurung Poisson, sehingga persamaan (10) dapat dituliskan menjadi persamaan (11).

$$\frac{\partial \rho_0^{eq}}{\partial t} = \left\{ \left(\frac{\partial H_0}{\partial p} \frac{\partial \rho_0^{eq}}{\partial x} - \frac{\partial H_0}{\partial x} \frac{\partial \rho_0^{eq}}{\partial p} \right) + \left(\frac{\partial h}{\partial p} \frac{\partial \rho_0^{eq}}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \rho_0^{eq}}{\partial p} \right) \right\} + \gamma \partial_p \left(p \rho_0^{eq} + \frac{1}{\beta} \partial_p \rho_0^{eq} \right) + \gamma \partial_p \left(\rho_0^{eq} \frac{\partial h}{\partial p} \right) \quad (11)$$

Jika di ruas kiri pada persamaan (11) diturunkan terhadap t, maka didapatkan turunan berantai, sehingga dapat dituliskan menjadi persamaan (12).

$$\frac{\partial \rho_0^{eq}}{\partial t} = \frac{\partial \rho_0^{eq}}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial t} \quad (12)$$

Substitusi persamaan (8) ke persamaan (12) didapatkan hasil menjadi persamaan (13).

$$\frac{\partial \rho_0^{eq}}{\partial t} = \left(\frac{-\beta}{2} x^2 + \frac{1}{\lambda 2(\lambda)} \right) \dot{\lambda} \rho_0^{eq} \quad (13)$$

Kemudian selesaikan persamaan yang ada di ruas kanan pada persamaan (11) dengan menganggap nilai m=1 pada Hamiltonian dan menggunakan turunan parsial, sehingga didapatkan hasil persamaan (14).

$$-\beta \left(\lambda(t)x \frac{\partial h}{\partial p} - p \frac{\partial h}{\partial x} \right) \rho_0^{eq} + \left(-\gamma \beta p \frac{\partial h}{\partial p} + \gamma \frac{\partial^2 h}{\partial p^2} \right) \rho_0^{eq} \quad (14)$$

Setelah itu substitusikan hasil yang didapat pada persamaan (13) dan (14) ke persamaan (11), sehingga diperoleh persamaan (15).

$$\left(\frac{-\beta}{2} x^2 + \frac{1}{2\lambda(\lambda)} \right) \dot{\lambda} \rho_0^{eq} = -\beta \left(\lambda(t)x \frac{\partial h}{\partial p} - p \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \left(-\gamma \beta p \frac{\partial h}{\partial p} + \gamma \frac{\partial^2 h}{\partial p^2} \right) \rho_0^{eq} \quad (15)$$

Selesaikan persamaan di atas, sehingga diperoleh persamaan baru yaitu persamaan (16).

$$\left(\frac{-\beta}{2} x^2 + \frac{1}{2\lambda(\lambda)} \right) \dot{\lambda} = -\beta \left(\lambda(t)x \partial_p h - p \partial_x h \right) - \gamma \beta p \partial_p h + \gamma \partial_{pp} h \quad (16)$$

Kemudian nilai potensial tambahan didapatkan dengan menggunakan permisalan dari persamaan Hamiltonian, menjadi persamaan (17).

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} \lambda_t x^2 \quad (17)$$

$$h = ap^2 + bpx + cx^2$$

Kemudian masukkan nilai h pada ruas kanan di persamaan (16) dan diturunkan, maka didapatkan hasil persamaan (18).

$$-\beta p 2 \lambda(t) ax - \beta \lambda(t) bx^2 + \beta bp^2 + \beta p 2 cx - 2\gamma \beta ap^2 - \beta p \gamma bx + 2\gamma a \quad (18)$$

Kemudian cari nilai a, b, dan c pada persamaan diatas dengan metode pengelompokkan ruas kiri dan kanan pada persamaan (16), sehingga diperoleh.

$$\begin{aligned} a &= \frac{\lambda}{4\lambda(\tau)\gamma} \\ b &= \frac{\lambda}{2\lambda(\tau)} \\ c &= \frac{\lambda}{4\gamma} + \frac{\gamma\lambda}{4\lambda(\tau)} \end{aligned} \tag{19}$$

Kemudian substitusikan hasil dari nilai a,b,dan c ke persamaan (17) sehingga di dapatkan hasil nilai h , menjadi persamaan (20).

$$\begin{aligned} h &= ap^2 + bpx + cx^2 \\ h &= \frac{\lambda}{4\lambda(\tau)\gamma} p^2 + \frac{\lambda}{2\lambda(\tau)} px + \left(\frac{\lambda}{4\gamma} + \frac{\gamma\lambda}{4\lambda(\tau)} \right) x^2 \end{aligned} \tag{20}$$

Jika potensial awal menjadi $U_0 = u(x - \lambda)$, dan energi kinetik awal $= \frac{p^2}{2m}$, maka hamiltonian partikel atau H_0 adalah energi kinetik awal + potensial awal, sehingga hamiltonian partikel atau $H_0 = \frac{p^2}{2m} + u(x - \lambda)$ (Nakamura et al., 2020)(Li et al., 2017), dan persamaan Kramers ditulis sebagai berikut

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = \{H_0, \rho_0\} + \gamma \partial_p \left(\frac{\partial H_0}{\partial p} \rho_0 + \frac{1}{\beta} \partial p \rho_0 \right) \tag{21}$$

Jika ditinjau distribusi partikel dengan mengasumsikan $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0\right)$ yang tidak bergantung waktu dengan λ adalah konstanta, maka didapatkan distribusi partikel keadaan *equilibrium* (setimbang), menjadi persamaan (22).

$$\rho_0 = c \exp(-\beta H) \tag{22}$$

Masukkan nilai hamiltonian ke persamaan (22), maka menjadi menjadi persamaan (23).

$$\rho_0 = c \exp\left(-\beta \left(\frac{p^2}{2m} + u(x - \lambda)\right)\right) \tag{23}$$

Nilai dari konstanta C dapat diperoleh dengan cara normalisasi, dengan batas normalisasi dimulai dari 0 sampai ∞ sehingga menjadi persamaan (24).

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\rho_0(x, \lambda)|^2 dx dp = 1 \tag{24}$$

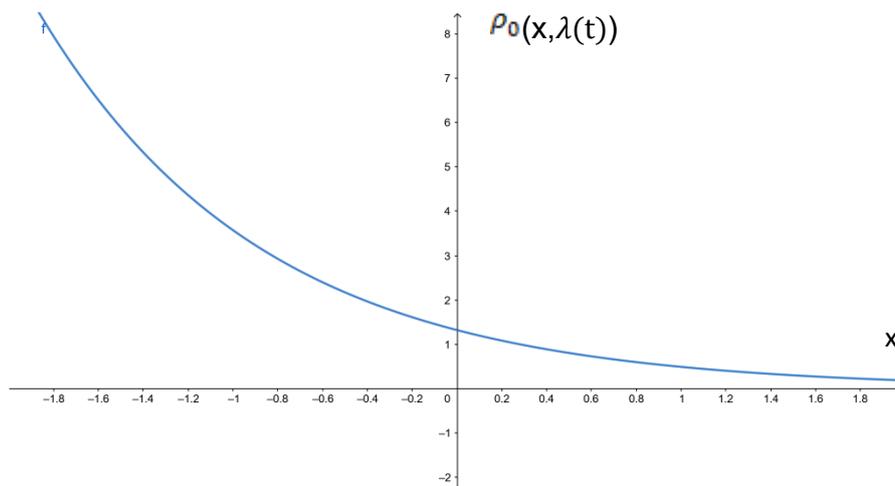
Dengan mensubstitusikan hasil dari $\rho(x, \lambda)$ pada persamaan (23) ke persamaan (24), maka didapatkan nilai dari konstanta C menjadi persamaan (25).

$$C = \beta \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad (25)$$

Kemudian, substitusikan nilai konstanta C di atas, maka distribusi partikel pada keadaan setimbang (*equilibrium*) dapat dituliskan menjadi persamaan (26).

$$\rho_0 = \beta \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(\frac{-\beta p^2}{2m} - \beta u(x - \lambda)\right) \quad (26)$$

Pola distribusi partikel ($\rho(x, \lambda)$) untuk x mulai dari $x = -2$ sampai $x = 2$ dapat diamati pada gambar di bawah ini:



Gambar 3. Distribusi Partikel mulai dari $x=-2$ sampai $x =2$, saat , $\beta=1$, $\lambda=1$, $p=1$, $m=1$, dan $u=1$

Selanjutnya, jika sistem diberi gangguan dengan parameter kontrol λ ditinjau menjadi parameter kontrol yang bergantung waktu ($\lambda(t)$) dan dengan mengubah potensial awal $U_0 = u(x - \lambda)$ menjadi potensial yang bergantung waktu, $U_0 = u(x - \lambda(t))$, maka persamaan (26) dapat dituliskan menjadi persamaan (27).

$$\rho_0^{eq} = \beta \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(\frac{-\beta p^2}{2m} - \beta u(x - \lambda(t))\right) \quad (27)$$

Agar $\rho_0(x, \lambda(t))$ pada persamaan (27) tetap memenuhi persamaan Kramers pada persamaan (21), maka Hamiltonian menjadi $H = H_0 + h$, dengan h adalah potensial tambahan yang akan ditambahkan agar sistem kembali ke keadaan setimbang, maka dapat dituliskan menjadi persamaan (28).

$$H = \frac{p^2}{2m} + h \tag{28}$$

Pada keadaan setimbang (*equilibrium*) Hamiltonian persamaan Kramers dapat dituliskan kembali menjadi persamaan (29).

$$\frac{\partial \rho_0^{eq}}{\partial t} = \{H_0 + h, \rho_0^{eq}\} + \gamma \partial_p \left(p \rho_0^{eq} + \frac{1}{\beta} \partial_p \rho_0^{eq} \right) \tag{29}$$

Dengan {...} adalah kurung Poisson, sehingga persamaan (29) dapat dituliskan menjadi persamaan (30).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_0^{eq}}{\partial t} = & \left\{ \left(\frac{\partial H_0}{\partial p} \frac{\partial \rho_0^{eq}}{\partial x} - \frac{\partial H_0}{\partial x} \frac{\partial \rho_0^{eq}}{\partial p} \right) + \left(\frac{\partial h}{\partial p} \frac{\partial \rho_0^{eq}}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \rho_0^{eq}}{\partial p} \right) \right\} \\ & + \gamma \partial_p \left(p \rho_0^{eq} + \frac{1}{\beta} \partial_p \rho_0^{eq} \right) + \gamma \partial_p \left(\rho_0^{eq} \frac{\partial h}{\partial p} \right) \end{aligned} \tag{30}$$

Jika di ruas kiri $\rho_0(x, \lambda(t))$ pada persamaan (30) diselesaikan dengan menurunkan $\rho_0(x, \lambda(t))$ diturunkan terhadap waktu, maka didapatkan turunan berantai menjadi persamaan (31).

$$\frac{\partial \rho_0^{eq}}{\partial t} = \frac{\partial \rho_0^{eq}}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial t} \tag{31}$$

Substitusi persamaan (27) ke persamaan (31) lalu diselesaikan dengan cara diturunkan, sehingga didapatkan persamaan (32).

$$\beta u \lambda \rho_0^{eq} \tag{32}$$

Kemudian selesaikan persamaan yang ada di ruas kanan pada persamaan (30) dengan menganggap nilai $m=1$ pada Hamiltonian dan menggunakan turunan parsial, sehingga didapatkan persamaan (33).

$$-\beta (u \partial_p h - p \partial_x h) \rho_0^{eq} + \left(-\gamma \beta p \frac{\partial h}{\partial p} + \gamma \frac{\partial^2 h}{\partial p^2} \right) \rho_0^{eq} \tag{33}$$

Setelah itu substitusikan hasil yang didapat pada persamaan (32) dan (33) ke persamaan (30), sehingga diperoleh persamaan (34).

$$(\beta u) \lambda \rho_0^{eq} = -\beta (u \partial_p h - p \partial_x h) \rho_0^{eq} + \left(-\gamma \beta p \frac{\partial h}{\partial p} + \gamma \frac{\partial^2 h}{\partial p^2} \right) \rho_0^{eq} \tag{34}$$

Selesaikan persamaan di atas dengan cara disederhanakan, sehingga diperoleh persamaan (35).

$$(\beta u) \lambda = -\beta (u \partial_p h - p \partial_x h) - \gamma \beta p \partial_p h + \gamma \partial_{pp} h \tag{35}$$

Kemudian nilai potensial tambahan didapatkan dengan menggunakan permisalan dari persamaan Hamiltonian yang mengandung unsur P dan x, maka menjadi persamaan (36).

$$H = \frac{p^2}{2m} + u(x - \lambda(t)) \quad (36)$$

$$h = ap + bx$$

Kemudian cari nilai a dan b pada persamaan diatas dengan metode pengelompokkan ruas kiri dan kanan pada persamaan (35) dengan memasukkan nilai h pada persamaan (36), sehingga diperoleh persamaan (37)

$$a = \lambda \quad (37)$$

$$b = \gamma\lambda$$

Kemudian substitusikan hasil dari nilai a dan b ke persamaan (36) sehingga didapatkan hasil nilai h , menjadi persamaan (38)

$$h = ap + bx \quad (22)$$

$$h = \lambda p + \gamma\lambda x$$

$$h = \lambda (p + \gamma x)$$

Jadi, untuk mempercepat sistem kembali ke keadaan setimbang, diperlukan potensial tambahan yang bergantung pada konstanta gesekan fluida (γ) dan bergantung terhadap waktu.

KESIMPULAN

Telah dilakukan penelitian dengan meninjau metode *Shortcuts to Adiabaticity* (STA) yang diaplikasikan dengan persamaan Kramers pada gerak Brown teredam sebagian yang bertujuan untuk mendapatkan suatu metode berupa energi tambahan untuk mempercepat gerak Brown teredam sebagian, sehingga mencapai titik kesetimbangan. Dalam penelitian ini, suku tambahan telah diperoleh dari gerak Brown yang teredam sebagian untuk mempercepat gerakannya mencapai titik *equilibrium* kembali. Gerak Brown yang mulanya bergerak acak terus menerus tanpa henti dan butuh waktu yang sangat lama untuk kembali ke keadaan seimbang. Dengan menambahkan energi tambahan berupa potensial tambahan yang bergantung pada konstanta gesekan (γ) dan bergantung terhadap waktu, maka dapat mempercepat gerak Brown menuju kesetimbangan lagi dalam keadaan adiabatik tanpa mengubah sifat dan karakteristik partikel. Dari hasil penelitian ini didapatkan dua hasil. Pertama, jika potensial awal sistem adalah $\frac{1}{2}\lambda(t)x^2$, didapatkan potensial tambahan sebesar

$$h = \frac{\lambda}{4\lambda(t)\gamma}p^2 + \frac{\lambda}{2\lambda(t)}px + \left(\frac{\lambda}{4\gamma} + \frac{\gamma\lambda}{4\lambda(t)}\right)x^2, \text{ kedua, jika potensial awal adalah } u(x - \lambda(t)),$$

didapatkan potensial tambahan sebesar $h = \lambda (p + \gamma x)$. Dengan menggunakan metode ini distribusi pada partikel Brown dapat terkarakteristik jauh lebih cepat.

DAFTAR PUSTAKA

- Brown, R., & Bennett, J. J. (John J. (1866). The Miscellaneous Botanical Works Of Robert Brown (Vol. 1). Published For The Ray Society By R. Hardwicke. <https://www.biodiversitylibrary.org/item/61465>
- Çakmak, B., & Müstecaplıoğlu, Ö. E. (2019). Spin Quantum Heat Engines With Shortcuts To Adiabaticity. *Physical Review E*, 99(3), 32108. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.99.032108>
- Chen, X., & Muga, J. G. (2010). Transient Energy Excitation In Shortcuts To Adiabaticity For The Time-Dependent Harmonic Oscillator. *Physical Review A - Atomic, Molecular, And Optical Physics*, 82(5), 2. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.82.053403>
- Cohn, J., Safavi-Naini, A., Lewis-Swan, R. J., Bohnet, J. G., Gärttner, M., Gilmore, K. A., Jordan, J. E., Rey, A. M., Bollinger, J. J., & Freericks, J. K. (2018). Bang-Bang Shortcut To Adiabaticity In The Dicke Model As Realized In A Penning Trap Experiment. *New Journal Of Physics*, 20(5), 2. <https://doi.org/10.1088/1367-2630/Aac3fa>
- Deffner, S. (2016). Shortcuts To Adiabaticity: Suppression Of Pair Production In Driven Dirac Dynamics. *New Journal Of Physics*, 18(1), 2–5. <https://doi.org/10.1088/1367-2630/18/1/012001>
- Del Campo, A. (2013). Shortcuts To Adiabaticity By Counterdiabatic Driving. *Physical Review Letters*, 111(10), 1–5. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.111.100502>
- Francis S. TSE, Ivan E. Morse, R. T. H. (1978). *Mechanical Vibrations Theory And Application*. University Of Cincinnati 1–18.
- Guéry-Odelin, D., Ruschhaupt, A., Kiely, A., Torrontegui, E., Martínez-Garaot, S., & Muga, J. G. (2019). Shortcuts To Adiabaticity: Concepts, Methods, And Applications. *Reviews Of Modern Physics*, 91(4), 3–4. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.91.045001>
- Hatomura, T., & Mori, T. (2018). Shortcuts To Adiabatic Classical Spin Dynamics Mimicking Quantum Annealing. *Physical Review E*, 98(3), 1. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.98.032136>
- Jenks, S. (2006). Introduction To Kramers Equation Derivation Of Kramers Equation. 7(12), 2.
- Khujakulov, A., & Nakamura, K. (2016). Scheme For Accelerating Quantum Tunneling Dynamics. *Physical Review A*, 93(2), 1–14. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.93.022101>
- Li, G., Quan, H. T., & Tu, Z. C. (2017). Shortcuts To Isothermality And Nonequilibrium Work Relations. *Physical Review E*, 96(1), 1–12. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.96.012144>
- Martínez, I. A., Petrosyan, A., Guéry-Odelin, D., Trizac, E., & Ciliberto, S. (2016). Engineered Swift Equilibration Of A Brownian Particle. *Nature Physics*, 12(9), 843–846. <https://doi.org/10.1038/Nphys3758>
- Masuda, S., & Nakamura, K. (2022). Fast-Forward Scaling Theory. 9(10), 3. <https://doi.org/10.1098/Rsta.2021.0278>
- Masuda, S., & Rice, S. A. (2014). Rapid Coherent Control Of Population Transfer In Lattice Systems. *Physical Review A - Atomic, Molecular, And Optical Physics*, 89(3). <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.89.033621>

- Nakamura, K., Khujakulov, A., Avazbaev, S., & Masuda, S. (2017). Fast Forward Of Adiabatic Control Of Tunneling States. *Physical Review A*, 95(6), 1–15. <https://doi.org/10.1103/Physreva.95.062108>
- Nakamura, K., Matrasulov, J., & Izumida, Y. (2020). Fast-Forward Approach To Stochastic Heat Engine. *Physical Review E*, 102(1), 1–12. <https://doi.org/10.1103/Physreve.102.012129>
- Pradana, I. A. (2018). Analisa Mikrotremor Menggunakan Metode Random Decrement Untuk Mikrozonasi Potensi Kerusakan Akibat Gempabumi Di Kabupaten Pacitan, Institut Teknologi Sepuluh Nopember
- Risken, H. (1996). Fokker-Planck Equation. 63–95. https://doi.org/10.1007/978-3-642-61544-3_4
- Romadani, A., & Rosyid, M. F. (2022). Proses Difusi Relativistik Melalui Persamaan Langevin Dan Fokker-Planck. *Jurnal Teknosains*, 11(2), 101. <https://doi.org/10.22146/Teknosains.63229>
- Setiawan, I. (2018). Dinamika Spin Kuantum Adiabatik Dipercepat. *Disertasi Doktor*, 30214004, 13, Unpublished Thesis. Institut Teknologi Bandung.
- Sugihakim, R., Setiawan, I., & Gunara, B. E. (2021). Fast-Forward Of Local-Phased-Regularized Spinor In Massless 2+1-Dimensions Adiabatic Dirac Dynamics. *Journal Of Physics: Conference Series*, 1951(1). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1951/1/012068>
- Takahashi, K. (2014). Fast-Forward Scaling In A Finite-Dimensional Hilbert Space. *Physical Review A - Atomic, Molecular, And Optical Physics*, 89(4). <https://doi.org/10.1103/Physreva.89.042113>
- Torrontegui, E., Martínez-Garaot, S., Ruschhaupt, A., & Muga, J. G. (2012). Shortcuts To Adiabaticity: Fast-Forward Approach. *Physical Review A - Atomic, Molecular, And Optical Physics*, 86(1), 1–7. <https://doi.org/10.1103/Physreva.86.013601>